РЫБИНСКОЕ ОРДЕНА "ЗНАК ПОЧЕТА" УЧИЛИЩЕ ИМЕНИ В.И. КАЛАШНИКОВА-ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "ВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ТРАНСПОРТА

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ГИДРОМЕХАНИКА»

РЫБИНСК
2026

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая программа составлена в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования специальности 140106 “Энергообеспечение предприятий” и предназначена для студентов заочной формы обучения. Программа рассчитана на объем 93 часа изучения дисциплины – Газодинамика

Цель преподавания дисциплины - газодинамика - дать студентам заочной формы обучения представления о законах течения сплошной среды – как сжимаемой, так и несжимаемой, основных уравнениях сохранения применительно к течению сплошной среды. О способах определения массового расхода и основных параметров газового потока.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Ведение. Основные понятия и модели, применяемые в газодинамике.
2. Одномерное энергоизолированное течение сжимаемого газа. Критерий сжимаемости. Полные и статические параметры потока и их взаимосвязь.
3. Уравнение движения при одномерном течении. Связь формы струйки тока и скорости потока. Газодинамические функции состояния.
4. Понятие о массовом и объемном расходе. Газодинамические функции расхода.
5. Понятие о газодинамическом импульсе. Газодинамические функции импульса.
6. Одномерное течение вязкого сжимаемого газа при наличии энергомассообмена с окружающей средой. Уравнение обращения воздействия.
7. Различные виды сопел. Геометрическое сопло, тепловое сопло, расходное сопло.
8. Течение сжимаемого газа по трубе с трением.
9. Течение вязкой жидкости. Основные режимы течения.
10. Гидравлическое сопротивление круглых труб при ламинарном и турбулентном режимах течения.
10. Гидравлические потери на местных сопротивлениях.
11. Пограничный слой. Интегральные толщины пограничного слоя. Определение основных параметров пограничного слоя.
12. Особенности сверхзвукового течения газа.
13. Определение реактивной силы, возникающей при взаимодействии потока с каналом.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Касилов В.Ф. Справочное пособие по гидрогазодинамике для энергетиков. М: Издательство МЭИ, 2000. - 272 с.
2. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. М.: Энергия. 1974.
3. Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика. – 2-е изд. М. Машиностроение. 1990.
4. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М. Машиностроение. 1975.
5. Теплотехнический справочник, том 1, 2, 1976.
6. Г. Н. Абрамович. Прикладная газовая динамика. ,”Наука”, М., 1976 г.
7. И. Л. Повх. Техническая гидромеханика, “Машиностроение”, Л, 1976 г.
8. А. И. Борисенко , Газовая динамика двигателей. ,Оборонгиз, М, 1962.
9. Л.Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа , “Наука”, М, 1973.
10. Б. С. Виноградов, Прикладная газовая динамика, Москва, 1960.
11. Г. Ю. Степанов, Гогим Л. В. Квазиодномерная газодинамика сопел реактивных двигателей, М. , Машиностроение, 1973 г.

Отчет по дисциплине включает в себя выполнение контрольной работы и курсовой работы. Обе отчета могут быть соединены в один. Контрольная работа состоит из 6 задач по трем основным разделам: одномерное энергоизолированное течение идеального газа, одномерное течение газа при наличии энергообмена с окружающей средой, силовое взаимодействие потока с каналом. Курсовая работа включает в себя расчет и профилирование сверхзвукового сопла и расчет характеристик газового эжектора. Исходные данные к выполнению курсовой и контрольной работы выдаются каждому студенту индивидуально.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Физические основы механики жидкости и газов

1.1.1 Применение общемеханических принципов к движению сплошной среды

Гидрогазодинамика изучает особенности течения жидкостей и газов в зависимости от сил, вызывающих эти течения. Внешние силовые воздействия определяются общими законами механики. Так, внешняя сила, воздействующая на объем V жидкости (с плотностью ρ и массой M), движущейся со скоростью c, определится векторным уравнением динамики:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{c}}{dt} = \rho V \vec{a},$$

где a – ускорение центра масс жидкости, t – время.

По этому уравнению могут быть определены сила инерции и другие массовые силы (например, гравитационные, электромагнитные). Уравнение может быть записано в форме изменения количества движения

$$d\left(M\vec{c}\right) = \vec{F}dt.$$

В условиях изолированной (замкнутой) системы, когда через контрольную поверхность нет переноса массы, количества движения и энергии, соблюдаются законы сохранения в их простейшей формулировке:

закон сохранения массы M $\quad \frac{dM}{dt} = 0;$

закон сохранения импульса J $\quad dJ/dt = 0;$

закон сохранения энергии E $\quad \frac{dE}{dt} = 0.$

Задачи механики жидкости и газа могут быть как внутренними - на протекание жидкости внутри твердых границ (например, внутри трубопровода), так и внешними – на обтекание твердых тел (например, при падении шара в вязкой жидкости).

Как известно, определенность их решения применительно к конкретному объекту зависит от следующих условий однозначности:

а) геометрических условий процесса (например, формы и размеров канала, шероховатости его стенок и т.п.);

б) граничных условий (например, прилипания жидкости к стенке);

в) временных условий, выражающих особенности протекания процесса во времени, например, неизменности (стационарности) установившегося во времени процесса или его нестационарности, т.е. изменяемости параметров во времени в фиксированной точке пространства;

г) физических условий, характеризующих свойства жидкости и газа.

1.1.2. Некоторые механические свойства жидкости и газа

Законы поведения жидкой или газообразной среды определяются, главным образом, связью между напряжениями и деформациями этой среды.

Свойство жидкости сопротивляться деформации сдвига определяется опытным законом вязкого трения Ньютона, резко отличным от закона сухого трения твердых тел

$$\tau = \mu \frac{dc}{dn},$$

где τ – касательное напряжение в жидкости; dc/dn – градиент скорости по нормали к направлению движения; μ – динамическая вязкость жидкости.

При конечном значении вязкости напряжение трения отлично от нуля только при наличии поперечного градиента скорости. Поэтому свободная поверхность покоящейся капельной жидкости всегда перпендикулярна главному вектору массовых сил.

Согласно второму закону Ньютона сопротивление жидкости сдвигу пропорционально поперечному градиенту скорости и стремится к нулю при уменьшении последнего до нуля. Поэтому в условиях покоя (а также движения идеальной жидкости ($\mu = 0$)) напряжение поверхностной силы на площадке при любой ее ориентации может быть только нормальным. Таким образом, в покоящейся жидкости давление передается во все стороны равномерно.

Сжимаемость жидкости и газа в силу их легкоподвижности может проявляться только в условиях всестороннего сжатия. В этих условиях (общий механический) закон Гука связывает приращение напряжения (приращение давления dp) и относительную объемную деформацию жидкости или газа dV/V в форме

$$dp = -E\frac{dV}{V},$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга).

Так как $\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$, то $d\rho = E\frac{d\rho}{\rho}$ или $\frac{dp}{d\rho} = \frac{E}{\rho} = a^2$,

где $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ - скорость распространения звука в упругой среде (связанная с распространением напряженного состояния, а не с действительными перемещениями частиц).

Таким образом, механической мерой сжимаемости жидкости и газа могут явиться как модуль упругости, так и скорость распространения звука, тем большая, чем меньше сжимаемость данной среды. Так, для воздуха при нормальных условиях $a \sim 340$ м/с, для воды $a \sim 1500$ м/с, для стали $a \sim 5000$м/с, для абсолютно несжимаемой среды $a = \infty$ и малые возмущения в ней распространяются мгновенно.

Пока не происходит существенных изменений термодинамического состояния и плотности газа, в механическом отношении его поведение не отличается от поведения капельной жидкости, которая заполняла бы то же пространство, не имея свободной поверхности. Поэтому, в механике жидкости и газа под термином «жидкость» понимаются как капельные жидкости, так и газы в условиях, когда их можно рассматривать как сплошную, легкоподвижную и однородную среду. В связи с этим в гидрогазодинамике принята гипотеза сплошности (которая, впрочем, неприменима при очень малых давлениях газа), т.е. жидкость рассматривается как сплошная среда

(континуум), лишенная молекул и межмолекулярных пространств. Эта гипотеза дает возможность использовать математический аппарат, пригодный для непрерывных функций, в том числе осуществлять предельный переход к бесконечно малому объему. При этом в качестве реального газа используется его модель, так называемый совершенный газ, т.е. газ, подчиняющийся уравнению состояния Клапейрона-Менделеева и имеющий постоянные теплофизические константы.

1.2. Одномерное течение идеальной жидкости

1.2.1. Основные уравнения сохранения

Рассмотрим некоторые зависимости для одномерного потока (скорость его изменяется только вдоль одной координаты).

Параметры течения, характерные для движущейся жидкости, называются статическими. Параметры, наблюдающиеся в заторможенной до нулевой скорости жидкости (при условии, что процесс торможения не сопровождался ростом энтропии), называются параметрами полного торможения или кратко - полными.

Давление, температура, плотность и скорость определяют термодинамическое и кинематическое состояние потока жидкости. Скорость газового потока в гидрогазодинамике выражается в относительной форме: через число Маха $M = c/a$ или приведенную скорость $\lambda = c/a_{кр}$, где $a_{кр}$ - критическая скорость. Критической скоростью называется скорость течения, численно равная местной скорости звука.

Известные законы сохранения, например, закон сохранения энергии, могут быть записаны в форме зависимости параметров течения от относительной скорости. Уравнение энергии для струйки жидкости в дифференциальной форме записывается исходя из формулировки закона сохранения энергии

$$dQ = dU + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{c^2}{2}\right) + gdZ + dL + dL_{тр},$$

где Q – общее количество теплоты, подведенное к 1 кг массы газа; U – внутренняя энергия газа (1 кг массы); z – вертикальная координата; L – техническая работа, совершаемая газом (1 килограммом газа); $L_{тр}$ – работа сил трения, приходящаяся на 1 кг массы.

Общее количество теплоты Q можно представить как сумму, состоящую из тепла, подведенного от наружного источника, и тепла внутреннего, выделенного в результате трения: $Q = Q_{нар} + Q_{вн}$

Так как $Q_{вн} = L_{тр}$, а из термодинамики известно, что

$$dV + d\left(\frac{p}{\rho}\right) = di,$$

где i – энтальпия, уравнение энергии можно записать в форме:

$$dQ_{нар} = d\left(\frac{c^2}{2}\right) + di + gdZ + dL.$$

Обычно изменением потенциальной энергии dz пренебрегают в сравнении с изменением других её составляющих.

В интегральной форме уравнение энергии запишется в виде:

$$Q_{нар} = L_{1-2} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + i_2 - i_1,$$

где 1, 2 – условное обозначение начальной и конечной точек термодинамического процесса.

Это уравнение удобно использовать для энергетически изолированного течения, когда $Q_{нар} = 0;\ L = 0.$

$$\frac{c_1^2}{2} + i_1 = \frac{c_2^2}{2} + i_2 = const,$$

$$i^*_1 + i^*_2 = const?$$

где $i_1^* = \frac{c_1^2}{2} + i_1$ - энтальпия торможения в состоянии 1 (в сечении 1-1), i_2^* – энтальпия торможения в сечении 2-2. Далее все параметры торможения обозначены индексом «*».

1.2.2. Газодинамические функции состояния

Имея в виду, что в совершенном газе $i = c_p \cdot T$, $i^* = c_p \cdot T^*$, где $c_p = \frac{k}{k-1}R$ - изобарная теплоемкость; T – температура (абсолютная); R – удельная газовая постоянная; k – показатель изоэнтропы, получаем:

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{c^2}{2c_p T} = 1 + \frac{k-1}{2}\frac{c^2}{kRT} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2.$$

При выводе этой формулы учтено, что $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{kRT}$, поскольку для изоэнтропического процесса $p = const\ \rho^k$.

$$dp = const k\rho^{k-1}d\rho = \frac{p}{\rho_k}k\rho^{k-1}d\rho = k\frac{p}{\rho}d\rho = kRTd\rho.$$

Поскольку в изоэнтропическом процессе: $\frac{\rho^*}{\rho} = \left(\frac{T^*}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}}$; то

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \qquad \frac{\rho^*}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Таким образом, параметры состояния газового потока однозначно связаны с числом Маха. Чтобы получить аналогичную связь параметров состояния с приведенной скоростью λ , запишем уравнение теплосодержания в форме:

$$\tau(\lambda)=\frac{T}{T^*}=1-\frac{c^2}{2c_pT^*}=1-\frac{k-1}{k+1}\frac{c^2}{\frac{2k}{k+1}RT^*}=1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2 ,$$

где $\lambda=\frac{c}{a_{кр}}$; $a_{кр}=\sqrt{\frac{2k}{k+1}RT^*}$.

Уравнение теплосодержания можно записать так:

$$\frac{c^2}{2}+\frac{k}{k-1}RT=\frac{k}{k-1}RT^* \text{ , т.е. } \frac{c^2}{2}-\frac{Q}{k-1}=\frac{Q^*}{k-1}^2 ,$$

где $a=\sqrt{KRT}$.

Для сечения, в котором местная скорость течения равна местной скорости звука, $c = a = a_{кр}$, поэтому:

$$a_{кр}^2=\frac{2k}{k+1}RT^*.$$

Аналогично: $\pi(\lambda)=\frac{p}{p^*}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$; $\varepsilon(\lambda)=\frac{\rho}{\rho^*}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$.

1.2.3. Газодинамические функции расхода

Газодинамическими функциями расхода удобно пользоваться при определении массового расхода, поскольку обычно бывают известными параметры торможения и относительная скорость.

Массовый расход жидкости определяется уравнением

$$G = \rho cF,$$

где F – площадь поперечного сечения канала.

Введем удельный расход $\overline{G}=G/F=c\rho$ и относительный расход $q=\frac{\overline{G}}{\overline{G}_{\max}}=\frac{\rho c}{(\rho c)_{\max}}$. Тогда: $G=q\overline{G}_{\max}F=q(\rho c)_{\max}F$.

В свою очередь:

$$\rho c=\rho^*\left(1\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}\sqrt{\frac{2k}{k+1}RT^*}\,\lambda;$$

$$\frac{d(\rho c)}{d\lambda}=\rho^*\sqrt{\frac{2k}{k+1}}RT^*\left(1-\frac{k-1}{k+2}\lambda^2\right)^{-1}\left(1-\lambda^2\right).$$

Из условия $\frac{d(\rho c)}{d\lambda}=0$, получаем $\lambda_1=1;\quad \lambda_2=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$.

Условию $\lambda_2=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ соответствует асимптотический минимум *(ρc),* а условию $\lambda_1=1$ - максимум. Т.е.:

$$(\rho c)_{\max}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k+1)}}\frac{p^*}{\sqrt{T^*}}\sqrt{\frac{k}{R}}.$$

Таким образом,

$$G=\frac{p^*}{\sqrt{T^*}}\sqrt{\frac{k}{R}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}q(\lambda)F=m(k,R)\frac{p^*}{\sqrt{T^*}}q(\lambda)F,$$

где $m(k,R)=\sqrt{\frac{k}{R}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$; $q(\lambda)=\frac{\rho c}{(\rho c)_{\max}}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$.

Можно также записать:

$$G=m(k,R)\frac{p}{\sqrt{T^*}}y(\lambda)F;$$

$$y(\lambda)=\frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\frac{\lambda}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}.$$

Зависимости $q(\lambda)$ и $y(\lambda)$ являются газодинамическими функциями расхода.

1.2.4. Газодинамические функции импульса

Рассмотрим силовое взаимодействие потока со стенками канала. В соответствии с теоремой о сохранении количества движения можно записать:

$$R_\Sigma = G\,(c_2 - c_1),$$

где $G(c_2-c_1)$ – изменение секундного количества движения (между сечениями 1-1 и 2-2), R_Σ - сумма внешних сил.

В свою очередь $R_\Sigma = p_1F_1 - p_2F_2 - R$, где R – сила реакции жидкости. Поэтому,

$$R = p_1F_1 + Gc_1 - (p_2F_2 + Gc_2).$$

В газодинамике величина $pF+Gc$ является полным импульсом J= pF+Gc.

В свою очередь, $J=G\left(\frac{pF}{G}+c\right)$, $G=\rho cF$, поэтому, $J=G\left(\frac{p}{\rho c}+c\right)$.

Далее $\frac{p}{\rho}=RT=\tau(\lambda)\cdot RT^*;\quad c=a_{кр}\lambda;\ RT^*=\frac{k+1}{2k}a_{кр}^2;$

$$J = G\frac{k+1}{2k}Q^*\left(\frac{\tau(\lambda)}{\lambda}+\frac{2k}{k+1}\lambda\right) = G\frac{k+1}{2k}a_{кр}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{k+1}{2k}a_{кр}Gz(\lambda),$$

где $z(\lambda)=\lambda+\frac{1}{\lambda}$ - газодинамическая функция импульса.

Таким образом, $J = \frac{k+1}{2k}a_p Gz(\lambda),$

$$R = J_2 - J_1 = \frac{k+1}{2k}G\left(a_{кр2}z(\lambda_2) - a_{кр1}z(\lambda_1)\right).$$

При силовом взаимодействии потока со стенками канала возможен обмен энергией между потоком и окружающей средой.

В газодинамике широко используются две другие функции импульса:

$$f(\lambda) = \frac{J}{p^*F} = \frac{Gc+pF}{P^*F} = \frac{\rho c^2 + p}{p^*} = \varepsilon(\lambda)\frac{\rho^*\lambda^2 a_{кр}^2 + p^*\pi(\lambda)}{p^*} =$$

$$\varepsilon(\lambda)\left(\frac{2k}{k+1}\lambda^2 + \frac{\pi(\lambda)}{\varepsilon(\lambda)}\right) = \varepsilon(\lambda)\left(1+\lambda^2\right) = \left(1-\frac{k+1}{k-1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(1+\lambda^2\right)$$

Учитывая соотношение, $J = p^*F\,f(\lambda),$ получаем:

$$r(\lambda) = \frac{pF}{J} = \frac{pF}{Gc+pF}\frac{p^*F}{Gc+pF}\frac{pF}{p^*F} = \frac{\pi(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{1-\frac{k-1}{k+1}}{1+\lambda^2}.$$

Таким образом,

$$J = \frac{pF}{r(\lambda)}, \quad \text{где} \quad r(\lambda) = \frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1+\lambda^2}.$$

1.2. Установившееся одномерное течение вязкого сжимаемого газа в канале переменного сечения при наличии энергообмена и массообмена с окружающей средой.

1.3.

1.3.1. Уравнение обращения воздействия

Рассмотрим влияние ряда факторов: переменности сечения канала и величины расхода, трения, энергообмена на величину скорости установившегося одномерного потока в канале при отсутствии массовых сил (Рис. 1_. Для этого запишем уравнения сохранения, принятые в механике: уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности), уравнение сохранения импульса (уравнение движения), уравнение сохранения энергии (уравнение энергии).

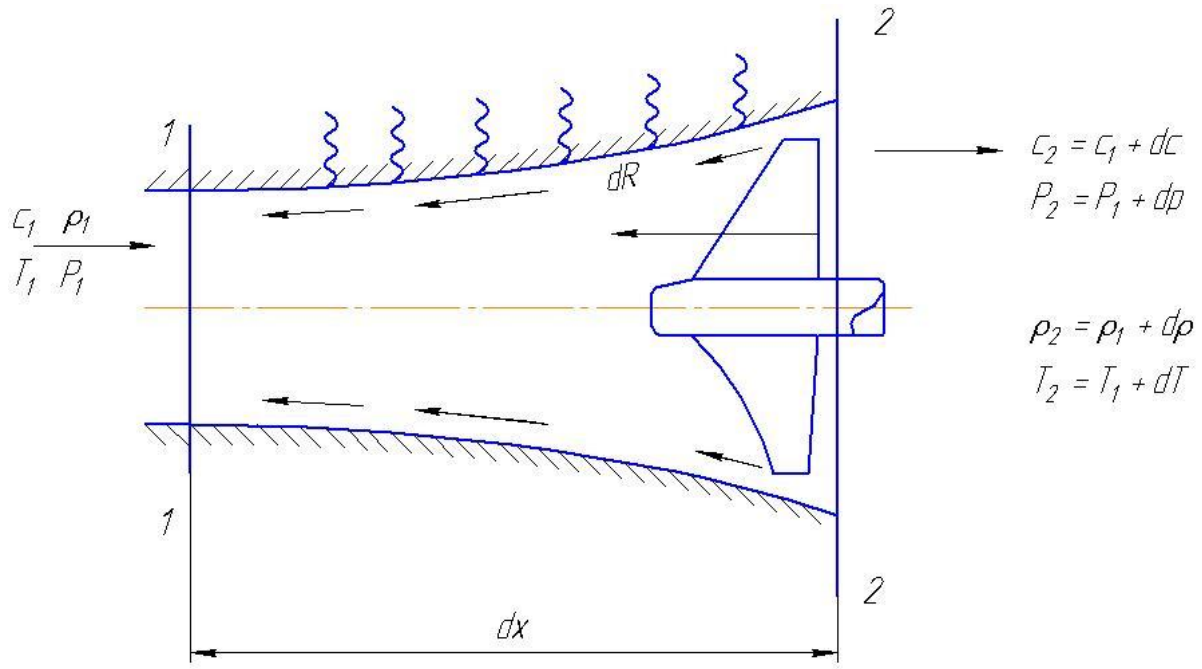


Рис. 1. Схема течения газа при наличии энергомассобмена с окружающей средой

Уравнение неразрывности в данном случае является уравнением для массового расхода. Согласно определению:

$$G = \rho c F$$

В данном случае расход газа является переменной величиной, поэтому дифференцирование уравнения расхода приводит к выражению:

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dF}{F}$$

Уравнение движения (второй закон Ньютона) в данном случае следует записать так:

$$Gdc = -dp\,F - \tau\,\Pi dx - dR$$

Где dc – приращение скорости (алгебраическое) на малой длине dx элементарной струйки тока;

dp –приращение давления;

τ – напряжение трения на стенке;

П – периметр канала;

dR – элементарная (на участке длиной dx) сила, с которой механическое устройство действует на газ.

Уравнение энергии в данном случае записывается как уравнение баланса всех видов энергии движущегося газа для одного килограмма массы:

$$dQ - dL = di + d\left(\frac{c^2}{2}\right)$$

где dQ - внешнее тепло, подведенное к газу;

dL - внешняя механическая работа, т.е. в соответствии с принятым правилом знаком это работа, совершаемая газом (по этой причине характери-

стики энергообмена dQ и dL записаны в левой части уравнения с разными знаками);

di - изменение энтальпии газа по статическим параметрам;

d ($c^2/2$) - кинетическая энергия одного килограмма газа. В данном случае под скоростью понимается средняя скорость (без указания способа осреднения).

Из уравнения движения дифференциал давления записывается следующим образом: $\frac{dp}{\rho} = -cdc - dL_{TP} - dL$

В этом уравнении: dL = dR c /G – удельная работа технического устройства;

$dL_{тр} = \tau \Pi dx c/G$ – удельная работа трения.

В свою очередь из уравнения состояния дифференциал давления записывается следующим образом: $\frac{dp}{\rho} = RT\frac{d\rho}{\rho} + RdT$

Дифференциал температуры записывается из уравнения энергии:

$$RdT = \frac{k-1}{k}dQ - \frac{k-1}{k}cdc - \frac{k-1}{k}dL$$

(энтальпия совершенного газа выражается через теплоемкость следующим образом: $i = RT\,k/(k-1)$.)

Дифференциал плотности также заменяется из уравнения для массового расхода:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dG}{G} - \frac{dc}{c} - \frac{dF}{F}$$

В результате получается:

$$\frac{dP}{\rho} = RT\left(\frac{dG}{G} - \frac{dF}{F} - \frac{dc}{c}\right) + \frac{k-1}{k}dQ - \frac{k-1}{k}cdc - \frac{k-1}{k}dL$$

Приравняем последние два уравнения и заменим величину RT заменяется на a^2/k. В итоге после группировки получается уравнение обращения воздействия (уравнение Вулиса):

$$\left(M^2-1\right)\frac{dc}{c} = \frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} - \frac{k-1}{a^2}dQ - \frac{dL}{a^2} - \frac{k}{a^2}dL_{mp}$$

Особенностью этого уравнения является перемена знака множителя ($M^2 – 1$) при переходе скорости течения через скорость звука. Поэтому любое воздействие (из указанных в правой части уравнения) изменяется на противоположное при изменении скорости потока с переходом через скорость звука. В дозвуковом потоке сужение канала, подвод дополнительной массы газа, подвод тепла, совершение газом механической работы и работы против сил трения вызывают ускорение газа. Наоборот, те же воздействия в

сверхзвуковом потоке вызывают его торможение. Анализ уравнения Вулиса позволяет сделать важный вывод об ограниченности одностороннего воздействия. Под влиянием одностороннего воздействия величину скорости газового потока можно довести только до критического значения, но не более.

Реализация любого из рассмотренных в правой части воздействий при отсутствии всех других может рассматриваться как соответствующее сопло.

1.3.2. Различные виды сопел

Геометрическое сопло представляет собой канал переменного сечения, в котором энергетически изолировано движется идеальный газ при отсутствии массообмена с окружающей средой. Согласно уравнению Вулииса уравнение геометрического сопла есть:

$$\left(M^2 - 1\right)\frac{dc}{c} = \frac{dF}{F}$$

В дозвуковой части геометрическое сопло (сопло Лаваля) сужается, а в сверхзвуковой части расширяется. При наличии перепада давления в геометрическом сопле возможно осуществить разгон газа до скорости, определяемой соотношением между критическим и выходным сечением сопла. Действительно, согласно условию равенства расходов $q(\lambda_{вых}) = F_{кр}/F_{вых.}$

Это же соотношение определяет величину статического давления в выходном сечении сопла по отношению к давлению полного торможения. Действительно:

$$p_{вых} = p^* \pi(\lambda_{вых})$$

В том случае, если давление в окружающей среде совпадает со статическим давлением в выходном сечении сопла, имеем расчетный режим работы геометрического сопла. В противном случае реализуются нерасчетные режимы работы сопла с расширением или сжатием газа за пределами сопла, а также со сжатием газа внутри расширяющейся части в зависимости от перепада давления на сопло.

В соответствии с условием энергоизолированности температура торможения постоянна во всех сечениях сопла. В соответствии с условиями идеальности и энергоизолированности давление полного торможения также постоянно во всех сечениях сопла. Статические параметры газового потока (давление, температура и плотность) монотонно уменьшаются вдоль сопла.

В соответствии с условиями идеальности газа и энергоизолированности течения процесс изменения параметров состояния в сопле Лаваля является изоэнтропическим.

Расходное сопло представляет собой канал постоянного сечения, в котором осуществляется разгон газового потока за счет изменения расхода

при отсутствии трения, массообмена и энергообмена с окружающей средой. Уравнение для расходного сопла имеет вид:

$$\left(M^2-1\right)\frac{dc}{c}=-\frac{dG}{G}$$

Ускорение в дозвуковой части расходного сопла достигается за счет вдува дополнительной массы газа, имеющей такие же параметры торможения, как и основной поток, а в сверхзвуковой части – за счет отсоса газа. В критическом сечении сопла расход газа максимален. Течение газа в расходном сопле изоэнтропическое.

Температура торможения вдоль расходного сопла в силу энергоизолированности постоянна. Давление торможения также постоянно по причине идеальности газа и отсутствия энергообмена с окружающей средой.

Расходное сопло в смысле картины течения в нем аналогично геометрическому. Отличие состоит в том, что в расходном сопле сужение и расширение струек тока происходит под влиянием дополнительного подвода массы газа, а не под действием изменения проходного сечения канала.

Механическое сопло представляет собой канал постоянного сечения, в котором происходит переход через скорость звука за счет воздействия технической работы при отсутствии трения и массообмена с окружающей средой. Уравнение Вулиса для механического сопла имеет вид:

$$\left(M^2-1\right)\frac{dc}{c}=-\frac{dL}{a^2}$$

Т.е., если газовый поток совершает работу (dL>0), то на дозвуковом режиме он ускоряется, а на сверхзвуковом тормозится. Наоборот, при подводе работы к газу (dL < 0) дозвуковой поток замедляется, а сверхзвуковой – ускоряется. Таким образом, непрерывное ускорение газового потока и переход через скорость звука в механическом сопле осуществляется за счет разгона потока в турбине до критической скорости и дальнейшего разгона сверхзвукового потока в компрессоре.

При этом компрессор и турбина являются условными понятиями, которые лишь осуществляют функцию механического энергообмена с окружающей средой, а сами являются бестелесными, т.е. не имеют физических толщин конструктивных элементов, т.к. это привело бы к геометрическому воздействию на поток.

В механическом сопле давление торможения и температура торможения в силу наличия энергообмена проходит через минимум в критическом сечении. В дозвуковой части (турбине) параметры торможения снижаются, а в сверхзвуковой части (компрессоре) возрастают. В силу идеальности газа процесс изменения параметров состояния в механическом сопле является изоэнтропийным.

Тепловое сопло является каналом постоянного сечения, в котором в отсутствии массообмена и энергообмена в механической форме движется иде-

альный газ, подвергающийся тепловому воздействию со стороны окружающей среды.

$$\left(M^2-1\right)\frac{dc}{c}=-\frac{(k-1)}{a^2}dQ$$

Ускорение газа связано с подводом тепла в дозвуковой части сопла, а в сверхзвуковой части с отводом тепла. Наоборот, торможение потока на дозвуковом режиме связано с отводом тепла, а на сверхзвуковом режиме с подводом. Следовательно, в тепловом сопле на дозвуковой его части необходимо подводить тепло, а при достижении критического состояния, в котором местная скорость течения достигает местной скорости звука, необходимо отводить тепло. Из изложенного понятно, что энтальпия торможения и температура торможения в тепловом сопле в отличии от механического сопла достигают максимальных значений.

Что касается давления полного торможения, то оно в критическом сечении минимально для идеального газа. Действительно, второй закон Ньютона (закон сохранения импульса) применительно к дозвуковой части теплового сопла запишется в виде:

$$G\,(c_2-c_1)=p_1F-p_2F$$

В этом уравнении индекс 1 соответствует предыдущему по ходу потока сечению, а индекс 2 – последующему. Данное уравнение соответствует равенству газодинамических импульсов:

$$I_2=I_1$$

В записи через газодинамическую функцию f(λ) это приводит к уравнению:

$$\sigma=\frac{p_2{}^*}{p_1{}^*}=\frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)}$$

Поскольку $\lambda_2 > \lambda_1$, то $f(\lambda_2) > f(\lambda_1)$, а $\sigma < 1$. Явление снижения полного давления в движущемся идеальном газе при подводе тепла называется тепловым сопротивлением.

Для понимания сути описанного явления следует учесть, что подвод тепла связан с увеличением энтропии газа, поскольку энтропия представляет согласно определению приведенное к температуре тепло:

$$dS=dQ/T$$

В последней формуле dS - прирост энтропии. При одинаковом подводе тепла dQ приращение энтропии тем выше, чем ниже статическая температура процесса. Статическая температура процесса максимальна и совпадает с полной в случае неподвижного газа. Приращение энтропии при этом минимально. Уменьшение статической температуры процесса (что соответствует конечной скорости течения) при неизменном количестве подведенного тепла вызывает увеличение прироста энтропии. Чем выше скорость течения, тем ниже статическая температура и тем выше увеличение энтропии. Следовательно, по мере увеличения скорости течения при неизменном ко-

личестве подводимого к газу тепла будет увеличиваться прирост энтропии по сравнению со случаем теплоподвода к неподвижной жидкости. Увеличение энтропии связано с необратимым переходом части механической энергии в тепло, что собственно и является проявлением теплового сопротивления.

В сверхзвуковой части теплового сопла энтропия газа убывает вследствие отвода тепла, а давление торможения по этой причине увеличивается.

Поток, имеющий любую начальную дозвуковую скорость, можно за счет соответствующего подогрева в трубе постоянного сечения довести до критической скорости. Количество тепла, которое при этом надо подвести к газу называется критическим подогревом. Величина критического подогрева зависит от начальной скорости течения: чем ниже скорость тем более сильный критический подогрев необходим.

Как уже отмечалось, односторонним воздействием, в том числе и тепловым, принципиально невозможно разогнать поток газа до сверхзвуковой скорости. Это явление называется тепловым кризисом. Если при достижении теплового кризиса (т.е. при достижении потоком критического состояния) продолжать подогрев газа, то величина критической скорости в конце зоны подогрева возрастет (однако число Маха при этом не изменится), а величина абсолютной скорости в начале зоны подогрева уменьшится (т.е. уменьшится массовый расход газа через трубу). Таким образом, заданному критическому подогреву соответствует вполне определенный расход газа через трубу при заданных параметрах торможения на входе, вполне определенное число Маха на входе.

В тепловом сопле имеется еще одна особенность. В конце зоны подогрева газа имеется участок канала, где имеет место снижение статической температуры по ходу потока несмотря на теплоподвод, т.е. несмотря на рост температуры торможения.

Действительно, уравнение импульсов можно записать в виде:

$$p_2 + \lambda_2 c_2^2 = p_1 + \lambda_1 c_1^2$$

Поскольку $a^2 = kp/\rho$, то это уравнение можно записать и так

$$p_1(1+kM_1^2) = p_2(1+kM_2^2)$$

То есть

$$p_2/p_1 = (1 + kM_1^2)/(1 + kM_2^2)$$

Статическое давление в тепловом сопле монотонно уменьшается в том числе и в сверхзвуковой части несмотря на рост полного давления.

Из условия равенства расходов с учетом постоянства сечения канала следует:

$$\lambda_2/\lambda_1 = c_1/c_2$$

Абсолютную скорость течения можно выразить через скорость звука и число Маха и далее через статическую температуру. $c = Ma = M(kRT)^{1/2}$

Поэтому

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{M_1}{M_2}\frac{a_1}{a_2}=\frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}},\qquad \frac{T_1}{T_2}=\frac{p_1}{p_2}\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Согласно уравнению состояния совершенного газа:

Поэтому

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{M_1^2}{1+kM_1^2}\frac{1+kM_2^2}{M_2^2}=\frac{M_1^2}{1+kM_1^2}\left(k+\frac{1}{M_2^2}\right)$$

статическая плотность газа в тепловом сопле также монотонно убывает. Согласно уравнению состояния:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{M_2^2}{M_1^2}\left[\frac{1+kM_1^2}{1+kM_2^2}\right]^2$$

При рассмотрении течения с фиксированными параметрами во входном сечении это можно рассматривать как зависимость статической температуры в каком – либо сечении от скорости в этом сечении (числа Маха).

Поэтому

$$\frac{dT_2}{dM_2}=\frac{\left(1+kM_1^2\right)^2}{M_1^2}\frac{2M_2\left(1-kM_2^2\right)}{\left(1+kM_2^2\right)^3}=0$$

Из последнего уравнения следует, что

$$M_{2экстр}=\frac{1}{\sqrt{k}}\prec 1$$

Это означает, что статическая температура достигает максимума в дозвуковой части теплового сопла в некотором сечении, расположенном до критического. Поскольку в этом сечении dT = 0, а dQ > 0, то элементарный термодинамический процесс является изотермическим, а само сечение называется изотермическим. На участке от входного сечения сопла до изотермического статическая температура газа повышается, а на участке от изотермического и далее до выходного – понижается. Причем от изотермического сечения теплового сопла до критического наблюдается снижение статической температуры при подводе тепла. Этот эффект объясняется проявлением сжимаемости, которое приводит к снижению статической температуры при разгоне потока, не компенсируемому приростом температуры в связи с теплоподводом. Иными словами на этом участке теплового сопла в кинетическую энергию направленного движения тепла переходит больше, чем потребляется от внешнего источника, в результате чего и происходит снижение статической температуры газа при росте полной.

Количественные соотношения между параметрами торможения могут быть получены из условия равенства газодинамических импульсов для двух произвольных сечений теплового сопла.

$$\frac{k+1}{2k}G\,a_{кр2}\,z(\lambda_2)=\frac{k+1}{2k}G\,a_{кр1}\,z(\lambda_1)$$

$$p_2^*f(\lambda_2)F=p_1^*f(\lambda_1)F$$

$$\frac{T_2^*}{T_1^*}=\frac{Z^2(\lambda_1)}{Z^2(\lambda_2)}=\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\left(\frac{1+\lambda_1}{1+\lambda_2}\right)^2$$

$$\sigma=\frac{p_2^*}{p_1^*}=\frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)}=\frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda_2^2}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_2^*}{\rho_1^*}=\frac{p_2^*}{p_1^*}\frac{T_1^*}{T_2^*}=\frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)}\frac{z^2(\lambda_2)}{z^2(\lambda_1)}=\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\frac{1+\lambda_2^2}{1+\lambda_1^2}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Количество тепла, подводимое к газу на дозвуковой части сопла определяется по температурам торможения. $Q = c_p(T^*_2 - T^*_1)$

В последнем уравнении c_p - теплоемкость совершенного газа при постоянном давлении. Относительное количество тепла, подводимое к газу.

$$q=\frac{Q}{i_{1^*}}=\frac{Q}{C_pT_1^*}=\frac{T_2^*}{T_1^*}-1=\frac{\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\left(1-\lambda_1^2\lambda_2^2\right)}{\lambda_1^2\left(1+\lambda_2^2\right)^2}$$

Величина относительного критического подогрева соответствует условию $\lambda_2 = 1$.

$$q_{\max}=\left(\frac{1-\lambda_1^2}{2\lambda_1}\right)^2$$

Величина критического подогрева зависит от начальной скорости течения и стремительно уменьшается до нуля по мере приближения скорости течения к звуковой.

Предельная абсолютная скорость истечения из теплового сопла соответствует условию $M_2 = \infty$.

Поскольку из условия равенства расходов следует, что $c_2 / c_1 = \lambda_1/\lambda_2$, то

$$\frac{c_{\max}}{c_1}=1+\frac{1}{kM^2_1}$$

Относительная максимальная скорость истечения по отношению к скорости в критическом сечении

$$\lambda_{\max}=\frac{k+1}{k}$$

Таким образом максимальная скорость истечения из теплового сопла, меньше максимальной скорости истечения из геометрического сопла:

$$\lambda_{\max.геом.}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

Сопло трения представляет собой канал постоянного сечения, в котором разгон потока осуществляется за счет воздействия трения.

Уравнение обращения воздействия для сопла трения

$$\left(M^2-1\right)\frac{dc}{c}=-\frac{k}{a^2}d\,L_{mp}$$

Следует иметь в виду, что сопло трения ограничено только дозвуковой частью, поскольку сила трения, как физический фактор, не может изменить знак своего воздействия.

Кроме того, следует понимать, что физической причиной увеличения скорости газового потока является продольный градиент статического давления, складывающийся вследствие наличия трения газа о стенки канала. Таким образом, трение не является непосредственной физической причиной увеличения скорости газового потока. Влияние трения проявляется в том, что, на преодоление сил трения расходуется механическая энергия газового потока, что выражается в снижении давления газа. Соответственно снижается плотность газа. Поэтому постоянный расход газа поддерживается в таком канале только за счет увеличения скорости газового потока. Скорость же газового потока, как уже указывалось, возрастает под действием перепада давления.

Напряжение трения на стенке канала можно выразить в долях от динамического давления:

$$\tau=\frac{b\rho c^2}{2}$$

В последней формуле b – коэффициент пропорциональности

Тогда для круглого канала дифференциал удельной работы трения можно записать $dL_{тр} = 2bc^2dx$

В этом случае уравнение для сопло трения записывается в виде:

$$\left(M^2-1\right)\frac{dc}{c}=-2b\,M^2\,d\bar{x}$$

В этом уравнении $\bar{x} = x / D$, где D - диаметр канала.

Переходя к приведенной скорости имеем

$$\left(\frac{1}{\lambda^2}-1\right)\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{4k}{k+1}bd\bar{x}$$

Это уравнение можно проинтегрировать в предположении, что b = const; результат интегрирования имеет вид:

$$-\frac{1}{2\lambda^2}-\ln\lambda=\frac{4k}{k+1}b\bar{x}+Const$$

Постоянная интегрирования определится из граничного условия во входном сечении канала, где имеет место некоторая скорость λ_1. Поэтому,

$$Const=-\frac{1}{2\lambda_1^{\,2}}-\ln\lambda_1$$

В таком случае интеграл можно записать так:

Введем обозначения: $\frac{1}{\lambda^2}+\ln\lambda^2=\varphi(\lambda)$ - газодинамическая функция трения

$\frac{8k}{k+1}b\bar{x}=\tilde{x}$ - приведенная длина трубы

Следовательно $\varphi(\lambda_1)-\varphi(\lambda)=\tilde{\chi}$.

Длина канала, на которой достигается кризис течения, стремительно уменьшается по мере увеличения входной скорости. Причем физический смысл имеет только дозвуковая часть решения. Сверхзвуковую (по приведенной скорости) часть решения можно было бы рассматривать как торможение сверхзвукового потока трением. Однако, в действительности торможение сверхзвукового потока в таком канале происходит с разрывом параметров в некотором сечении, т.е. скачкообразно.

1.4. Движение вязкой жидкости

Отличие гидродинамической модели реальной жидкости от идеальной состоит в том, что реальная жидкость обладает вязкостью и теплопроводностью. Вязкость жидкости приводит к появлению внутреннего трения, а теплопроводность к термодинамической обратимости движения. Вязкостью называется способность жидкостей и газов сопротивляться усилиям сдвига.

Диффузия молекул, а в турбулентном движении и целых молей, сопровождающаяся переносом количества движения из одного слоя в другой, является причиной возникновения силы трения и переноса тепла. Размерность динамического коэффициента вязкости легко определить из уравнения Ньютона:

$$\tau=\mu\frac{dc}{dn}$$

В международной системе единиц размерность динамичного коэффициента вязкости *Н с/м²*, в технической системе единиц *кг с/м²*, в системе СГС – *дин с/м²*. Одна механическая единица вязкости:

1 *кг с/м²* = 98,1 *дин с/м²* = 98,1 *пз (пуаз)* = 9,81 *Н с/м²*,

откуда получаем *1 пз* = 0,1 *Н сек/м²*.

Динамический коэффициент вязкости зависит от физических свойств жидкости, температуры и давления. Однако зависимость от давления заметно проявляется только при $p > 150 \cdot 10^5$ *Па*.

Зависимость динамического коэффициента вязкости от температуры в большинстве случаев определяется по эмпирическим формулам. Для воды обычно пользуются формулой Пуазейля:

$$\mu = \frac{0{,}0178\rho}{1 + 0{,}0337t + 0{,}00022t^2},$$

где ρ – плотность воды в *г/см*^{3} при температуре t *°C*.

Для газов и паров широко используется степенная формула:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n,$$

где n – показатель степени, имеющий разные численные значения от *0,5 до 1*.

Для воздуха принимают $n = 0{,}76$, а $\mu_0 = 17{,}2 \cdot 10^{-6}$ *Н с/м*^{2} ($1{,}755 \cdot 10^{-6}$ *кг с/м*^{2})

Отношение динамического коэффициента вязкости μ к плотности жидкости ρ называется кинематическим коэффициентом вязкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \frac{м^2}{с}.$$

Уравнение неразрывности в равной мере справедливо как для идеальной, так и для реальной жидкости. Что же касается уравнения Эйлера, то оно должно быть изменено, причем изменению подвергаются только поверхностные силы, а силы инерции и массовой силы остаются без изменения. Нормальные напряжения состоят из суммы гидродинамического давления и некоторой добавки, вызванной вязкостью. Приравнивая силы инерции сумме массовых и поверхностных сил, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right); \\
\frac{dv}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right); \\
\frac{dw}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right).
\end{aligned}\right\}$$

В данных уравнениях в силу парности $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Отсюда следует, что напряженное состояние жидкости в любой ее точке характеризуется тремя нормальными и тремя касательными напряжениями. Используя гипотезу о том, что напряжения, вызванные вязкостью, пропорциональны соответствующим скоростям деформации, получим уравнение движения вязкости жидкости, или так называемое уравнение Навье-Стокса:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(div\vec{c}\right); \\
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(div\vec{c}\right);$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(div\vec{c}\right).$$

Здесь

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ и т.д.}$$

В общем виде уравнения Навье-Стокса не интегрируются. Однако существует несколько конкретных задач, для которые уравнение Навье-Стокса имеет решение.

Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе. Направив ось *x* вдоль оси трубы, можно утверждать, что скорость жидкости везде направлена по оси *x* и является функцией только радиуса трубы *r; y* и *z* – компоненты уравнения дают:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0,$$

то есть давление по радиусу трубы постоянно;
Уравнение Навье Стокса запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}.$$

Так как левая часть уравнения от *x* не зависит, следовательно,

$$\frac{dp}{dx} = const$$

и градиент давления можно записать в виде:

$$-\frac{\Delta p}{l} = \frac{p_1 - p_2}{l}$$

Запишем уравнение в полярных координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dc}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\mu l}.$$

Интегрируя, получим

$$c = -\frac{\Delta p}{\mu l}r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Постоянную C_1 надо положить равной нулю, так как скорость должна оставаться конечной по всему сечению трубы, включая ось. Постоянную C_2 найдем из условия $r = R;\ c = 0$. Тогда получим:

$$c = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right).$$

Расход жидкости через трубу

$$Q = 2\pi\rho\int_U^R r\varpi dr = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l}\pi R^4 .$$

Полученное выражение называется формулой Пуазейля.

При *r = 0* найдем скорость на оси трубы

$$c_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2 .$$

Скорость по сечению трубы можно записать через скорость на оси:

$$c = c_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Если записать объемный расход жидкости через среднюю скорость, то, получим:

$$c_{cp} = \frac{1}{2}c_0 \ .$$

Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости между параллельными плоскостями. Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости в направлении оси *x* между двумя параллельными пластинами. Все величины зависят, очевидно, только от координаты *z*, направленной поперек зазора между пластинами.

Пренебрегая массовыми силами, из уравнения Навье-Стокса получим:

$$\mu\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x};$$

кроме того,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 .$$

Левая часть от *x* не зависит, следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = const .$$

Интегрируя дважды, получим:

$$c = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z^2 + C_1 z + C_2 .$$

Постоянное интегрирование C_1 и C_2 найдем из граничных условий: при $z = 0; c = 0$, следовательно, $C_2 = 0$; при $z = 1; c = 0$, найдя C_1, имеем:

$$c = \frac{1}{2\mu}z(l - z)\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Как видно, скорость в зазоре изменяется по параболе, причем при $z = \frac{1}{2} l$ получим максимальную скорость движения жидкости:

$$c_{max} = -\frac{1}{8\mu} l^2 \frac{\partial p}{\partial x}$$

Уравнение дает возможность определить объемный расход через единицу ширины зазора

$$Q = -\frac{l^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Из этого выраженияможно найти выражение для средней скорости в зазоре:

$$c_{ср} = -\frac{l^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Данный подход справедлив также для случая, когда одна из пластин движется в направлении оси *x* со скоростью *v*. В этом случае граничные условия для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 будут иными. Так, при $z = 0;\ c = 0$, и $C_2 = 0$; при $z = l;\ c = v$, откуда, найдя C_1, получим:

$$c = \frac{z}{l}\upsilon - \frac{1}{2\mu} z(l - z) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Расход жидкости в этом случае на единицу ширины пластины:

$$Q = \frac{l}{2}\upsilon - \frac{l^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Движение шара в вязкой жидкости. В качестве следующего примера на интегрирование уравнений Навье-Стокса обычно приводится решение задачи о движении шара в вязкой жидкости. Задача решается в том случае, если инерционными членами массовыми силами в уравнении движения можно пренебречь. Удобнее задачу решать в сферических координатах. При этом надо иметь ввиду, что шар при своем движении не должен вращаться. В результате интегрирования уравнений движения получим формулу для сил сопротивления шара:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R c.$$

Первый член правой части уравнения представляет собой архимедову силу, получающуюся за счет гидростатического давления. Второй член появляется только при движении жидкости и обусловлен силами вязкости. Так как сила *Q* уравновешивается весом шара, который равен $\frac{3}{4}\pi R^3 \rho_0 g$, где ρ_0 – плотность шара, то получим:

$$\mu c = \frac{2}{9} R^2 g(\rho - \rho_0).$$

С помощью можно определить вязкость жидкости (вискозиметры с падающим шариком), при известной вязкости и скорости можно определить радиус капельки. При известной вязкости можно определить скорость движения капелек заданного размера называют формулой Стокса, которая справедлива при $R \leq 1$.

Сопротивление при турбулентном режиме течения. Турбулентный режим течения отличается от ламинарного тем, что перенос количества движения из одного слоя жидкости в другой осуществляется не только за счет молекулярного движения, а главным образом за счет перехода отдельных частиц, объемов жидкости из одного слоя в другой. Этот перенос из одного слоя в другой осуществляется за счет наличия пульсационных составляющих скорости.

Универсальная формула для определения сопротивления, пригодная для любого режима течения:

$$\Delta p = \xi \frac{\rho c^2}{2}.$$

Однако в этом уравнении коэффициент сопротивления ξ является функцией не только режима течения, но и геометрических форм проточной части. Аналогичного вида уравнение можно записать для напряжения трения:

$$\tau = c_f \frac{\rho c^2}{2}.$$

Также можно получить уравнение для определения падения давления по длине канала при равномерном движении жидкости:

$$\Delta p = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho c^2}{2},$$

где ξ – коэффициент трения;

l – длина канала;

d – эквивалентный диаметр, который определяется через гидравлический радиус R_h $d = 4R_h$. Гидравлический радиус, в свою очередь определяется: $R = \frac{F}{U}$, где F – площадь, занятая жидкостью; U – периметр канала.

Для сжимаемой жидкости падение давления dp надо брать на элементе длины dx, а затем потери суммировать по всей длине, учитывая при этом, как изменяется по длине плотность ρ, скорость c и коэффициент трения ξ.

Коэффициент трения ξ для ламинарного режима можно найти теоретически:

$$\xi = \frac{64}{\mathrm{Re}}.$$

Для турбулентных режимов течения в технически гладких трубах пользуются эмпирическими формулами, например, формулой Конакова, справедливой в широком диапазоне чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$):

$$\xi = \frac{1}{(1{,}81g\,\mathrm{Re} - 1{,}5)^2},$$

или формулой Блазиуса, справедливой в диапазоне $10^5 \le \mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$:

$$\xi = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}.$$

Для шероховатых труб в той области, где коэффициент трения не зависит от числа Рейнольдса, можно пользоваться эмпирической формулой:

$$\xi = \frac{1}{\left(1{,}74 + 2\ln\frac{1}{n}\right)^2},$$

где $n = \dfrac{\Delta}{R}$ – относительная шероховатость трубы;

Δ – средняя высота неровностей;

R – радиус трубы.

Вязкость жидкости проявляется главным образом вблизи твердого тела. Эта, сравнительно небольшой толщины, область называется пограничным слоем. Пограничный слой характеризуется толщиной δ и наличием резкого изменения величины скорости по мере приближения к поверхности тела, где скорость потока тормозится до нуля. Помимо толщины δ пограничный слой характеризуется толщиной вытеснения δ^*, которая определяется:

$$\delta^* = \int_0^{\delta}\left(1 - \frac{\rho c}{\rho_0 c_0}\right)dy.$$

где ρ, c – текущее значение плотности и скорости в пограничном слое;

ρ_0, c_0 – плотность и скорость в невозмущенном потоке (при $y \ge \delta$).

Вводя относительную координату $\eta = \dfrac{y}{\delta}$, можно записать:

$$\delta^* = \delta\int_0^{1}\left(1 - \frac{\rho c}{\rho_0 c_0}\right)d\eta.$$

Существуют еще линейные характеристики пограничного слоя:

δ^{**} - толщина потери импульса;

δ^{***} - толщина потери энергии.

Толщина потери импульса определяется уравнением:

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho c}{\rho_0 c_0}\left(1 - \frac{c}{c_0}\right) dy$$

или

$$\delta^{**} = \delta \int_0^{1} \frac{\rho c}{\rho_0 c_0}\left(1 - \frac{c}{c_0}\right) d\eta .$$

Очень важной характеристикой пограничного слоя является условие постоянства давления по высоте пограничного слоя δ:

$$\frac{dp}{dy} = 0 .$$

Характер изменения скорости по высоте пограничного слоя зависит от режима течения в слое.

При ламинарном режиме течения в пограничном слое профиль скорости можно найти из уравнения:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{2}{3}\eta - \frac{1}{2}\eta^2 .$$

Для турбулентного пограничного слоя чаще пользуются степенной зависимостью:

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n ,$$

где n зависит от числа Рейнольдса, определенного по толщине пограничного слоя:

$R_\delta = \frac{\rho_0 c_0 \delta}{\mu}$	10^4	10^5	10^6	10^7
n	1/6	1/7	1/8	1/9

Иногда пользуются логарифмическим уравнением:

$$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{\tau}{\rho_0 c_0}}\lg\eta ,$$

по опытным данным $\chi = 0{,}4$.

Для определения толщины пограничного слоя, коэффициента трения и силы трения часто пользуются интегральным соотношением для пограничного слоя (уравнение количества движения), которое в общем виде записывается:

$$\frac{\tau_c}{\rho_0 c_0^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx} + \frac{1}{c_0}\left(2\delta^{**} + \delta^{*}\right)\frac{dc_0}{dx} .$$

Для несжимаемой жидкости при постоянной скорости вдоль обтекаемого тела уравнение импульса записывается особенно просто:

$$\frac{\tau_c}{\rho_0 c_0^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} .$$

Из уравнения для напряжения трения при ламинарном режиме течения при $y = 0$, можно получить зависимость для толщины пограничного слоя:

$$\delta = \frac{4{,}55x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},$$

для местного коэффициента трения:

$$c_f = \frac{0{,}66}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},$$

и для силы трения:

$$Q_x = c_{fcp}\frac{\rho_0 c_0^2}{2}xb,$$

где x, b – длина и ширина пластины; $c_{fcp} = 2\ c_f$.

1.5. Определение реактивной силы

Величина реактивной силы, возникающей при взаимодействии жидкости с каналом определяется на основании теоремы об изменении количества движения.

$$G\left(c_1 - c_2\right) = p_1F_1 + R_c - p_2F_2.$$

На рис. 2. R_c – реактивная сила. Согласно третьему закону Ньютона на поток действует равная по величине, но противоположная по закону сила, что и учтено в уравнении взаимодействия потока с каналом. Считая течение энергоизолированным и заменяя в уравнении площади через расходы, а абсолютные скорости через приведенные, целесообразно выразить реактивную силу через газодинамическую функцию импульса $z(\lambda)$:

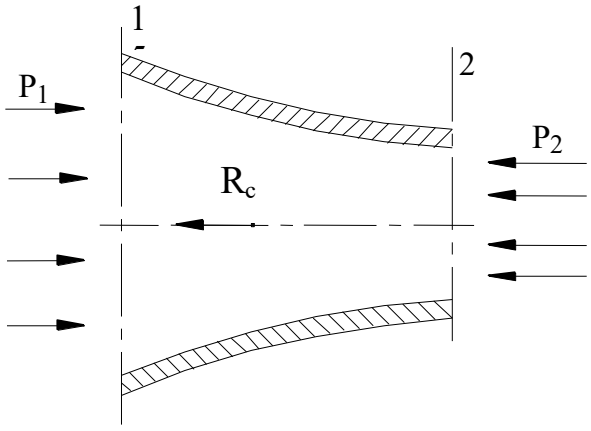


Рис. 2. Схема силового взаимодействия потока с каналом:
R_c – реактивная сила

$$R_c = \frac{k+1}{2k}Ga_{\text{кр}}\left[z\left(\lambda_2\right) - z\left(\lambda_1\right)\right].$$

Это уравнение позволяет определить направление действия реактивной силы. При $z(\lambda_2) > z(\lambda_1)$ сила R_c согласно уравнению положительна, т. е. направлена против потока, а при $z(\lambda_2) < z(\lambda_1)$ реактивная сила направлена по

потоку. Имея ввиду, что газодинамический импульс: $I = \frac{k+1}{2k} G a_{\text{кр}} z(\lambda_1)$, можно записать, что $I_{\text{кр}} = \frac{k+1}{2k} G a_{\text{кр}} z(\lambda_{\text{кр}}) = \frac{k+1}{2k} G a_{\text{кр}} 2.$

Отсюда $\frac{I}{I_{\text{кр}}} = \frac{z}{z_{\text{кр}}} = \frac{z}{2} = \frac{G_c + pF}{G a_{\text{кр}} + p_{\text{кр}} F_{\text{кр}}}$. Поэтому $z(\lambda) = 2 \frac{G_c + pF}{G a_{\text{кр}} + p_{\text{кр}} F_{\text{кр}}}$,

т. е. газодинамическая функция $z(\lambda)$ характеризует полный относительный импульс в сечении (относительно импульса в критическом сечении).
Замечая, что

$$G = m \frac{p^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda) F;\ a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T^*},$$

можно записать

$$R_c = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} p_1^* q(\lambda_1) F_1 \left[z(\lambda_2) - z(\lambda_1) \right] =$$

$$= \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} p_2^* q(\lambda_2) F_2 \left[z(\lambda_2) - z(\lambda_1) \right] =$$

$$= \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} p_{\text{кр}}^* F_{\text{кр}}^* \left[z(\lambda_2) - z(\lambda_1) \right].$$

Последнее уравнение показывает, что внутреннее усилие в канале зависит только от полного давления в минимальном сечении канала. Полная температура определяет размер критического сечения либо расход через него.
Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$R_c = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} p_2^* q(\lambda_2) z(\lambda_2) F_2 - \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} p_1^* q(\lambda_1) z(\lambda_1) F_1$$

или

$$R_c = p_2^* f(\lambda_2) F_2 - p_1^* f(\lambda_1) F_1.$$

В последнем уравнении $f(\lambda)$ – газодинамическая функция импульса, имеющая смысл приведенной плотности потока импульса. Действительно:

$$\frac{I}{p^* F} = \frac{Gc + pF}{pF} = \left(1 + \lambda^2\right) \varepsilon(\lambda) = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} q(\lambda) z(\lambda) =$$

$$= \left(\lambda^2 + 1\right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} = f(\lambda).$$

В конечном счете, уравнение для определения реактивной силы можно записать как разность импульсов:

$$R_c = I_2 - I_1.$$

Имея ввиду, что импульс может быть выражен через статическое давление, уравнение для реактивной силы можно записать следующим образом:

$$R_c = \frac{p_2 F_2}{r(\lambda_2)} - \frac{p_1 F_1}{r(\lambda_1)}.$$

При этом функция $r(\lambda)$ по смыслу представляет собой отношение газодинамического полного импульса к статическому импульсу. Действительно,

$$\frac{pF}{У} = \frac{pF}{Gc + pF} = \frac{p}{p + \rho c^2} = \frac{\tau(\lambda)}{1+\lambda^2} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1+\lambda^2} = r(\lambda).$$

Уравнение количества движения применительно к воздушно-реактивному двигателю запишется в виде:

$$R_c = G_{\text{в}}(C_{\text{а}} - C_{\text{н}}) + G_T C_{\text{а}} + (p_{\text{а}} - p_{\text{н}})F_{\text{а}},$$

где $G_{\text{в}}$ – расход воздуха; $G_{\text{т}}$ – расход топлива.

Здесь учтено, что топливо, содержащееся на борту самолета, выбрасывается со скоростью вытекающих из сопла продуктов сгорания. В последнем уравнении индекс «в» соответствует воздуху, «Т» – топливу, «н» – набегающему потоку, «а» – вытекающему потоку.

Применительно к реактивному двигателю последнее уравнение существенно упрощается, т. к. горючее и окислитель находятся на борту летательного аппарата с ракетным двигателем:

$$R_c = (G_{\text{ок}} + G_{Г})c_{\text{а}} - (p_{\text{а}} - p_{\text{н}})F_{\text{а}},$$

где $G_{\text{ок}}$ – расход окислителя, $G_{Г}$ – расход горючего.

Расчетным режимом считается такой, когда $p_{\text{а}} = p_{\text{н}}$.

В стартовых условиях для воздушно-реактивных двигателей $c_{\text{н}} = 0$, поэтому

$$R_c = (G_{\text{в}} + G_{\text{Т}})c_{\text{а}} + (p_{\text{а}} - p_{\text{н}})F_{\text{а}}.$$

Иногда величиной $G_{\text{Г}}$ в связи с ее малостью по сравнению с $G_{\text{в}}$ пренебрегают.

С использованием функции импульса $f(\lambda)$ последнее уравнение записывается в виде:

$$R_c = \left(p_{\text{а}}^* f(\lambda_{\text{а}}) - p_{\text{н}}\right)F_{\text{а}} = p_{\text{н}} F_{\text{а}}\left[\pi_c^* f(\lambda_c) - 1\right]$$

где $\pi_c^* = \frac{p_{\text{а}}^*}{p_{\text{н}}}$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа задание включает в себя расчёт, профилирование сопла Лаваля, а также расчёт дозвуковых и сверхзвуковых эжекторов.

В реактивном сопле потенциальная энергия давления газов преобразуется в кинетическую энергию струи. Основное назначение сопла состоит в создании реактивного импульса, который при заданной скорости может быть обеспечен фиксированным секундным расходом рабочего тела (продуктов сгорания). Следовательно, сопло имеет две характеристики, а именно – тяговую и расходную.

Строгий расчёт пространственного течения газов в сопле Лаваля производится с использованием метода потенциальных дозвуковых течений для потока в дозвуковой части сопла и метода волн или характеристик (в газодинамическом смысле этого слова) для его сверхзвуковой части. Далее, обычно с помощью интегральных соотношений, рассчитывается турбулентный пограничный слой. На основании таких расчётов можно построить контуры проточной части сопла, а также получить поправочные коэффициенты к расчётным результатам, полученным по существенно более простой одномерной теории сопла. Эти поправочные коэффициенты, как показывает опыт, мало отличаются от единицы, что оправдывает применение одномерной теории для расчёта сопл. Объясняется это тем, что основной причиной изменения параметров потока в соплах является изменение площади поперечного сечения по длине, т.е. геометрический фактор, тогда как другие причины – нарастание пограничного слоя и поверхностное трение – оказывает второстепенное влияние. А это в свою очередь обусловлено тем, что сопла – сравнительно короткие каналы и течение газа в них практически является энергоизолированным.

2.1. Расчет сверхзвукового сопла

Рассмотрим работу сверхзвукового сопла. Газ должен двигаться по соплу с ускорением. При малой скорости плотность газа можно считать постоянной, поэтому необходимо уменьшать сечение. Этим обусловлено сужение начальной части сопла. Дальнейшее увеличение скорости, связанное с расширением, сопровождается заметным уменьшением давления и, следовательно, плотности газа, что частично компенсирует рост скорости, и поэтому сужать сечение канала нужно уже не так быстро. Наконец, процесс происходит через такую стадию, когда плотность расширяющегося газа уменьшается обратно пропорционально скорости. В этом сечении канала скорость потока равно скорости звука. Дальнейшее увеличение скорости сопровождается ещё более быстрым падением плотности, вследствие чего,

как это следует из уравнения неразрывности, сечение сопла должно увеличиваться (Рис. 3).

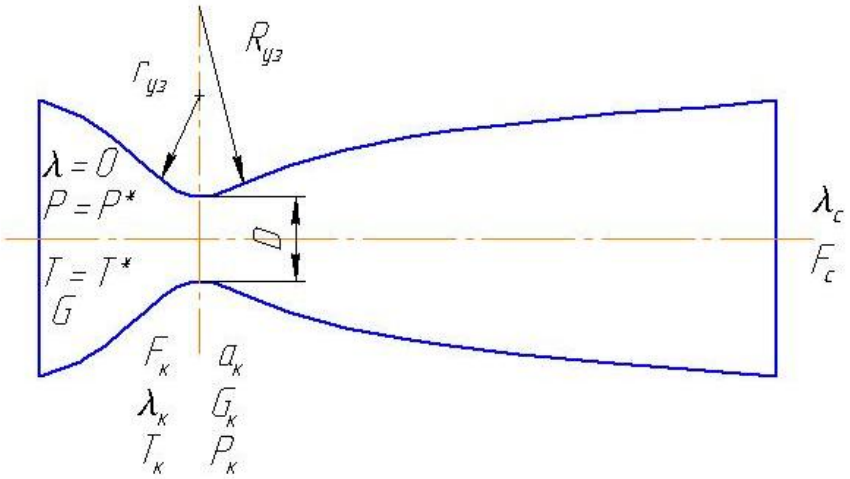


Рис. 3. Схема сверхзвукового сопла Лаваля

Таким образом, сверхзвуковое сопло, предназначаемое для получения сверхзвукового потока, должно состоять из сужающейся (дозвуковой) и расширяющейся (сверхзвуковой) частей. В самом узком сечении сверхзвукового сопла (критическое сечение) скорость потока равна звуковой.

Рассматривая совместно уравнения неразрывности и Бернулли (без учёта трения) в дифференциальной форме:

$$dG=d(\rho cF)=0$$

$$dG+\rho cdc=0$$

где ρ – плотность газа,

c – скорость газового потока,

F – площадь поперечного сечения сопла,

G –расход газа через сопло.

Разделим второе уравнение на ρc^2 и умножим и разделим первый его член на dρ.Тогда получим

$$\frac{1}{c^2}\frac{d\rho}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dc}{c}=0$$

Так как d(ρ,c,F)=0, то

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{dF}{F}-\frac{dc}{c}$$

Подставляя этот результат во второе уравнение и учитывая, что в идеальном адиабатическом процессе $\frac{dP}{d\rho}=\frac{1}{a^2}$, получим

$$(\frac{c^2}{a^2}-1)\frac{dc}{c}=\frac{dF}{F}$$

где a – скорость звука.

Анализируя это равенство, можно заметить, что при расширении (ускорении) газа, когда $\frac{dc}{c} > 0$, сечение сопла должно изменяться так, как указывалось выше, а именно:

если c<*a*, то $\frac{dF}{F} < 0$ (сужение),

если c=*a*, то $\frac{dF}{F} = 0$ (кризис),

если c>*a*, то $\frac{dF}{F} > 0$ (расширение).

Таким образом, наблюдается три режима: дозвуковой c<*a*, критический c=$a_{кр}$, сверхзвуковой c>*a*,

Сопла Лаваля могут быть коническими с углом раствора α≤20 и профилированные. Конические сопла применяются при очень больших скоростях истечения. При больших скоростях истечения λ_c>2, что соответствует степени расширения газа $\pi_П$, которая представляет собой отношение давления торможения на входе в сопло p^* к статическому давлению в окружающей атмосфере p_H, т.е.

$$\pi_П = \frac{p^*}{p_H},$$

обратная величина

$$\varepsilon_П = \frac{1}{\pi_П} = \frac{p_H}{p^*}$$

величине $\pi_П$ соответствует теоретическая приведённая скорость истечения при полном изоэнтропном расширении газа в выходном устройстве

$$\pi(\lambda_S) = \frac{1}{\pi}, \text{ (при } p_C = p_H).$$

Здесь π(λ) – газодинамическая функция давления, λ_S - приведённая скорость при изоэнтропном расширении.

Степень расширения $\pi_П$ следует отличать от степени расширения π_C, которая есть соотношение давления на входе в сопло p^* к давлению на срезе сопла p_C, т.е. обратная величина, называемая расчётным отношением давления

$$\pi_C = \frac{p^*}{p_C};\ \varepsilon_C = \frac{1}{\pi_C} = \frac{p_C}{p^*}$$

Эта величина совпадает с $\pi_П$ только на “расчётном” режиме работы сопла, когда $p_C = p_H$.

Значение располагаемой степени расширения и диапазон её изменения зависит от типа двигателя, режима его работы, а также от высоты полёта. При больших $\pi_П$ суживающие сопла дают большие потери тяги из-за недо-

расширения газа. Поэтому возникает необходимость применения сверхзвуковых сопел.

Различают четыре группы режимов работы сверхзвукового сопла.

1. Первая группа характеризуется повышенными давлениями среды

$$\varepsilon_{П} \geq \varepsilon_{C}$$

При этом режиме в струе за соплом образуются волны разрежения, взаимодействующие друг с другом и с внешней границей струи. Давление меняется вдоль оси струи и в поперечных сечениях струи.

2. Вторая группа режимов характеризует истечение из сопла при

$$\varepsilon_{C} \leq \varepsilon_{П} \leq \varepsilon_{1K}$$

где ε_{1K} - отношение давлений, при котором в выходном сечении сопла возникает прямой скачок. При $\varepsilon_{п}<\varepsilon_{1к}$ на срезе сопла образуются косые скачки уплотнения, пересекающиеся на оси.

3. Третья группа соответствует режимам со скачками уплотнения расширяющейся части сопла. При малых углах раствора расширяющейся части скачки в соплах близки по форме к прямым. При углах раствора больше 15° скачки в сопле косые.

4. В четвертой группе режимов сопло работает как труба Вентури (с дозвуковыми скоростями). Четвертая группа режимов: характеризуется изменением расхода через сопло. Расход через сопло начинает меняться при условии

$$\varepsilon_{П} \geq \varepsilon_{1m}$$

Здесь

$$\varepsilon_{1m} = \varepsilon_{*} + (1-\varepsilon_{*})\sqrt{1-\left(\frac{F_{*}}{F_{c}}\right)^{2}}$$

где критическое отношение давлений может быть определено из соотношения

$$\varepsilon_{*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Расчёт сопла производится по заданным параметрам торможения в камере p^{*}, T^{*}, относительной скорости на выходе из сопла λ_{C} и расход газа G. Определение режимов работы сопла проводится по заданному давлению окружающей среды p_{H} и расчётному давлению на срезе сопла p_{C}.

Профиль суживающегося участка сопла рассчитывается по формуле Витошинского

$$r = \frac{r_*}{\sqrt{1-\left[1-\left(\frac{r_*}{r_0}\right)^2\right]\frac{\left(1-\frac{3x^2}{l}\right)^2}{\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{3}l}\right)^3}}}$$

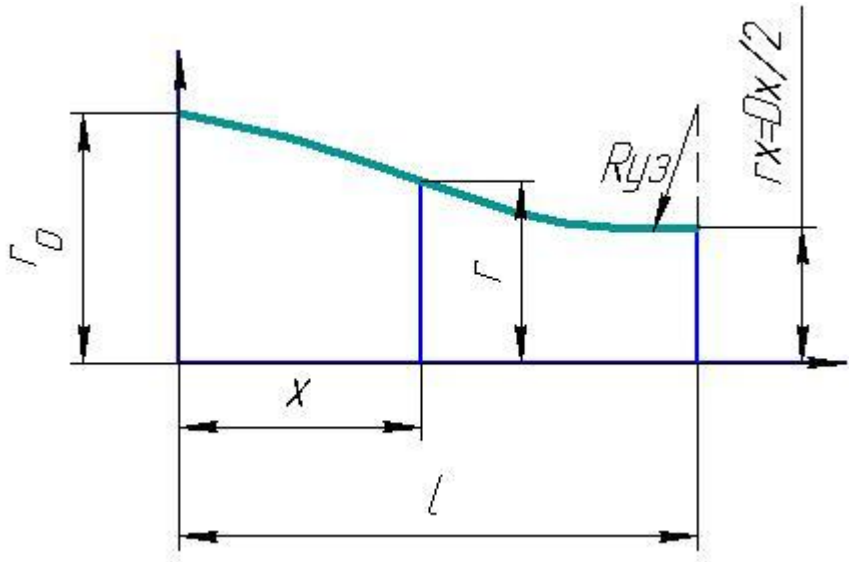


Рис. 4. К расчету профиля суживающейся части сопла.

Профиль, изображённый на рис. 4, пригоден для сопел, соединяющих две трубы различных диаметров, когда поток при переходе в трубу меньшего диаметра должен быть ускорен. Радиус горловины сопла r_* определяется по площади в критическом сечении сопла, которое рассчитывается по формуле

$$F_* = \frac{G\sqrt{T^*}}{mp^*\sigma_*\mu^*}$$

Здесь $\sigma_* = \pi\left(\frac{1}{\varphi_C}\right)/\pi(1) \approx 0{,}975$ при коэффициенте скорости равном $\varphi_C = 0{,}98$, μ^* - коэффициент, учитывающий неравномерность параметров потока в горловине сопла Лаваля можно считать зависящим только от отношения R/D_* (рис. 5), $m = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\left(\frac{k}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$ - величина, зависящая от показателя адиабаты и газовой постоянной.

Приближённо горловина сопла описывается двумя окружностями: дозвуковая часть R=0,75 D_*, а сверхзвуковая – r =0,12 D_* (рис. 3)

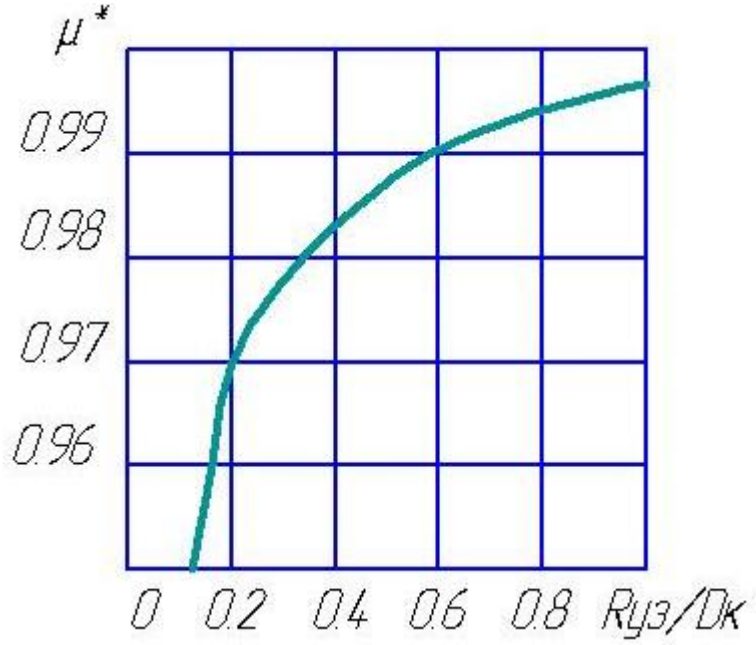


Рис 5. Зависимость коэффициента μ^*, учитывающего неравномерность параметров потока в горловине сопла Лаваля от отношения R/ D_*

Величина давления на срезе сопла равна

$$p_C = p^*\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_C^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Площадь выходного сечения расширяющейся части сопла

$$F_C = \frac{G_C\sqrt{T^*}}{mp^*\mu_C q(\lambda_c)}$$

где G_C - расход газа в выходном сечении сопла;

μ_C – коэффициент расхода, зависящий от коэффициента скорости;

$q(\lambda_C)$ – газодинамическая функция расхода, отвечающая заданной скорости истечения из сопла, определится по таблицам.

Коэффициент скорости φ_C можно рассматривать в виде произведения

$$\varphi_C = \varphi_{TP}\varphi_{CK}\varphi_\alpha$$

где $\varphi_{TP}, \varphi_{CK}, \varphi_\alpha$ – коэффициенты, учитывающие соответственно потери за счет трения, скачков и непараллельности потока. Для конических сопл Лаваля при $\alpha \le 20^\circ$ (рекомендуемое значение 10÷12°) можно считать $\varphi_{CK} \approx 1$; $\varphi_\alpha \approx \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$; φ_{TP} = 0,97+0,98 (меньшие значения соответствуют большим λ_C). При таком подходе к определению φ_C можно считать, что μ_C = 1.

Так как площадь критического сечения сопла $F_ж$ и выходного сечения F_c известны, а расширяющаяся часть сопла должна быть выполнена с

углом раствора $\alpha \le 20^{\circ}$ (для конических сопел), то длина расширяющегося участка L должна быть не менее

$$L \ge \frac{1}{tg\alpha}\left(\sqrt{\frac{F_C}{\pi}} - \sqrt{\frac{F_*}{\pi}}\right)$$

Для получения равномерного потока на выходе проводится профилирование сопла. Приближенно профиль сопла можно построить следующим образом. Горловина, как и прежде, описывается двумя окружностями: дозвуковая часть $R_{уз} \approx 0,75D_*$, а сверхзвуковая - $r_{уз} \approx 0,2D_*$. К последней окружности под углом Q_N к оси сопла проводится касательная NQ до пересечения с отрезком QC, проходящим через срез сопла, и наклонным к оси под углом θ_1 , отрезки NQ и QC соединяются с одноименными точками линии NQ ; огибающая полученной сетки прямых образует искомый контур сопла (рис. 6). На рис. 7 приведены вспомогательные графики для определения угла Q_N и длины сверхзвуковой части сопла L в зависимости от отношения $\frac{D_C}{D}$ и θ_1.

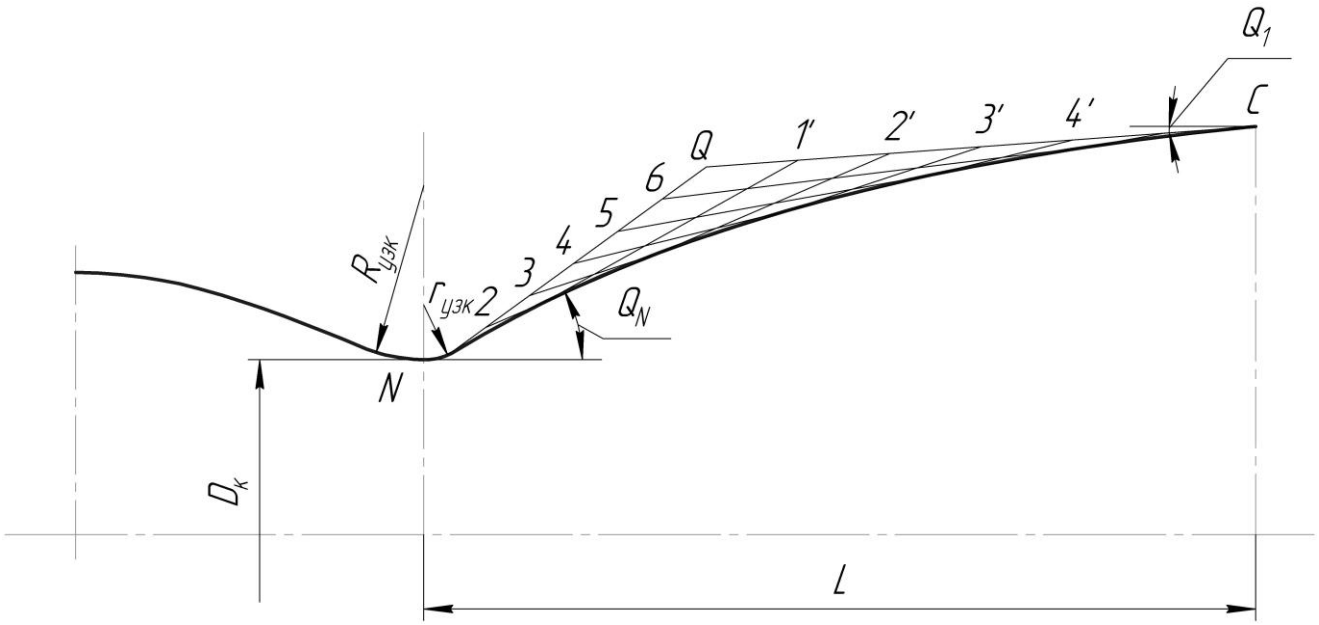


Рис. 6 Профилирование сопла Лаваля

Тяговая характеристика сопла Лаваля $\bar{R}_C = f\left(\pi_П, \frac{F_C}{F_*}\right)$ может быть рассчитана по уравнению:

$$\bar{R}_C = \frac{k+1}{k}\frac{1}{\lambda_C}\left[z(\lambda_C) - \frac{\tau(\lambda_C)}{2\lambda_C \pi\left(\frac{\lambda_C}{\varphi_C}\right)\pi_П}\right].$$

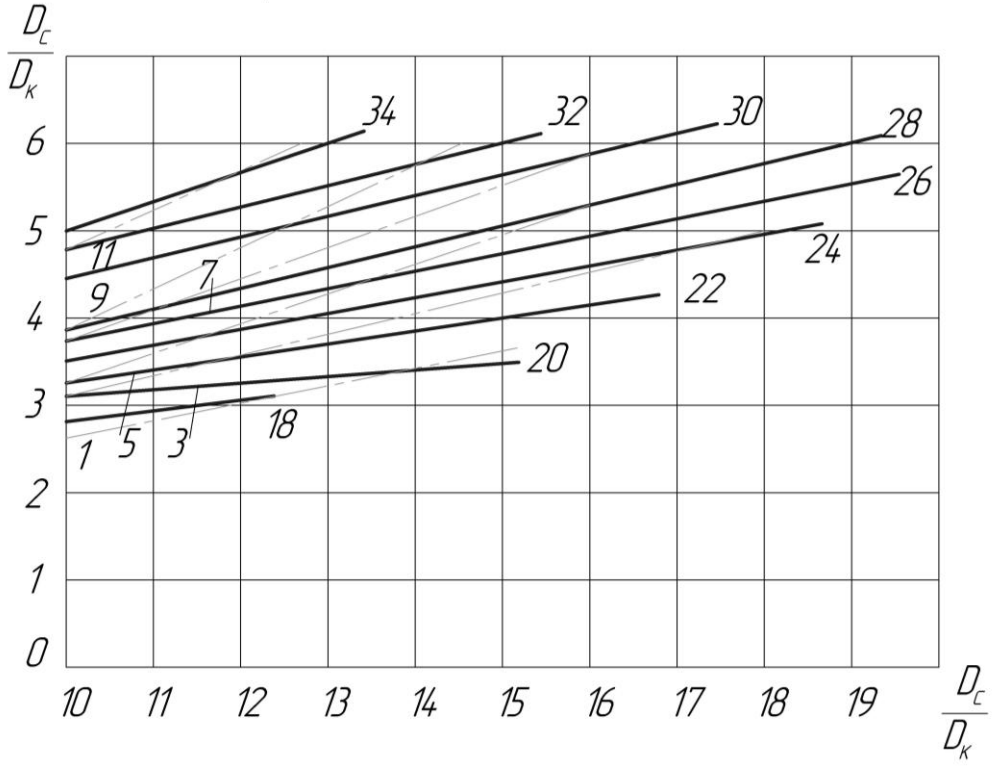


Рис 7. Зависимость углов Q_N и θ_1. от относительной длины сверхзвуковой части профилированного сопла Лаваля от отношения $\frac{D_C}{D_к}$

Уравнение определяет зависимость коэффициента тяги $\bar{R}_C$ от располагаемого перепада давлений $\pi_П$. Протекание этой характеристики зависит от расчетного перепада давлений π_C и $\frac{F_C}{F_*}$. Величина изоэнтронной приведенной скорости истечения λ_C однозначно связана с располагаемой величиной $\pi_П$ с помощью соотношения

$$\pi\left(\lambda_C\right)=\frac{1}{\pi_П}$$

Следует иметь в виду, что при $\pi_П$ значительно меньших расчетного значения π_C имеет место отрыв потока от стенок сопла. С помощью графика рис. 8 можно найти значение $\pi_{П\,отр}$

$$\pi_{П\,отр}=\frac{1}{\left(\frac{p_H}{p_C}\right)_{отр}\tau\left(\frac{\lambda_C}{\varphi_C}\right)}$$

Если не учесть отрыва потока при и вести вычисление по формуле (1.8) при $\pi_П<\pi_{П\,отр}$ расчетном фиксированном значении λ_C, то величина $\bar{R}_C$ будут получаться несколько заниженными по сравнению с действительными. Объясняется это тем, что на режимах перерасширения отрыв потока

приводит к увеличению давления на стенки сопла за сечением отрыва и поэтому несколько увеличивает тягу и действительное значение коэффициента тяги.

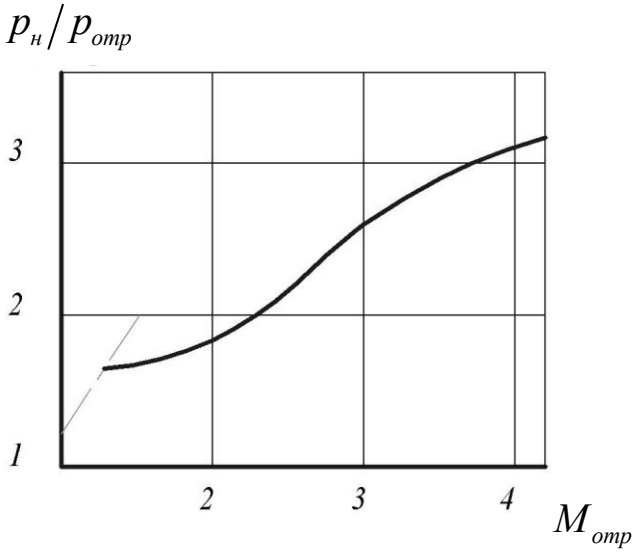


Рис 8. Зависимость отношения давлений при котором наступает отрыв турбулентного пограничного слоя от числа М в сечении отрыва

По этой формуле можно рассчитывать $\bar{R}_C$ и при отрывном течении. Следует только вместо λ_C подставлять значение приведенной скорости в сечении отрыва.

2.2. Расчет эжекторов.

Эжекторами называют струйные аппараты, в которых осуществляется смешание двух потоков разных энергий и давлений, в результате образуется смешанный поток с промежуточными значениями энергии и давления. Струйные аппараты выполняют функции насосов и компрессоров и находят широкое применение в технике.

Принципиальные схемы эжекторов приведены на рис. 9. Эжектор с изобарическим начальным участком смешения рассчитывается по уравнению количества движения (импульсов)

$$\psi(\lambda_1)+\frac{2k}{k+1}\chi\sqrt{Q}\lambda_2+\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\times\frac{p_K}{p_O}\left(\frac{F_{*d}}{F_{*C}}-\frac{F_1}{F_{*C}}\right)-\xi_{вy}=\sqrt{(1+\chi)(1+\chi\theta_1)}\psi_1(\lambda_3)$$

где $\chi = m_2 / m_1$ - коэффициент эжекции;

m_2 - секундная масса пассивного (эжектируемого) газа;

m_1 - секундная масса активного (эжектирующего) газа;

λ_1 - приведенная скорость активного газа;

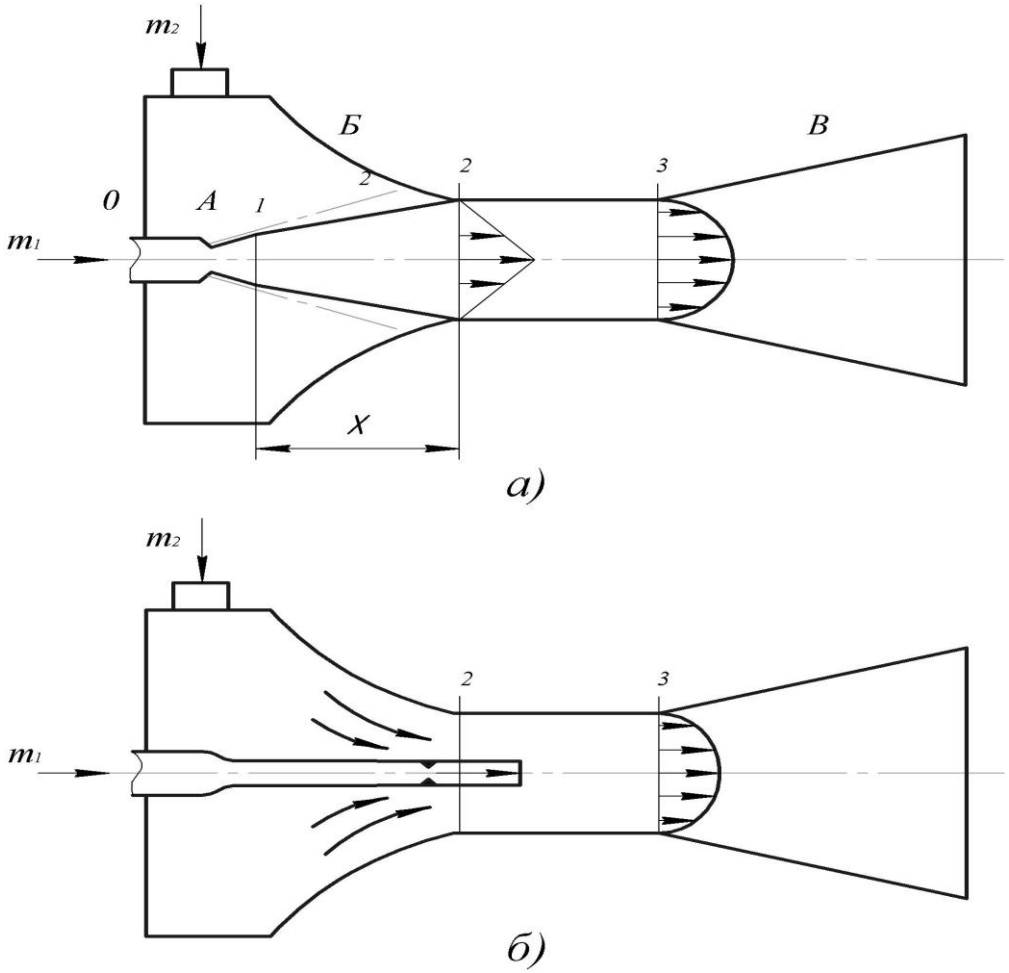


Рис. 9. Схемы – эжекторов а – с изобарическим участком смешения;
б – со смешением при F=const.

λ_2 - приведенная скорость пассивного газа;;

p_K -давление пассивного газа на изобарическом участке смешения (в камере смешения Б);

p_O -давление активного газа перед соплом А;

F_{*C}, F_1 -площади критического и выходного сечения сопла;

F_{*d} -площадь сечения горловины диффузора В;

$\psi(\lambda_1) = \varphi_C \lambda_{1S} + \frac{1}{\varphi_C} \lambda_{1S}$ -газодинамическая функция (φ_C - коэффициент скорости сопла активного газа; λ_{1S} - теоретическая скорость истечения из сопла активного газа);

$\psi_1(\lambda_3) = \varphi_H \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3}$ - газодинамическая функция (φ_H - коэффициент, учитывающий неравномерность поля скоростей в выходном сечении горловины; λ_3 - скорость в выходном сечении горловины);

$\theta_1 = \dfrac{T^*_{O2}}{T^*_{O1}}$ - отношение температур торможение пассивного $\left(T^*_{O2}\right)$ и активного $\left(T^*_{O1}\right)$ газа.

В расчетах можно принять $\varphi_C = 0,96 \div 0,98$; $\varphi_H = 1,0 \div 1,3$; коэффициент входного участка $\xi = 0,03 \div 0,04$ (при можно принять $\xi = 0$).

Уравнение содержит две неизвестные величины χ и F_{*d}/F_{*C} (или любые другие).

Вторым уравнением служит уравнение неразрывности:

$$\frac{p_{O1}}{p_O} = \frac{\varepsilon_{od}}{q(\lambda_3)} \frac{F_{*C}}{F_{*d}} \sqrt{(1+\chi)(1+\chi\theta_1)}$$

где $\varepsilon_{od} = p_{O4}/p_{O3}$ - отношение давлений торможения на диффузоре;

$q(\lambda_3)$ - газодинамическая функция расхода в выходном сечении горловины.

Величина ε_{od} определяется характеристиками диффузора и является коэффициентом, учитывающим потерю полного давления на диффузоре

$$\varepsilon_{od} = \frac{p^*_{O2}}{p^*_{O1}} = \left[\frac{k-1}{k+1} \frac{\lambda_1^2 (1-\eta_d)}{1 - \dfrac{k-1}{k+1}\lambda_1^2} + 1 \right]^{-\frac{k}{k-1}}$$

Здесь η_d - полный к.п.д.

$$\eta_d = \eta_{d1} + \frac{1-\eta_{d2}}{\lambda_1^2}$$

η_{d2} - к.п.д. расширяющейся части.

Ступень эжектора со смешением при постоянной площади сечения (рис. 9, б) рассчитывается по уравнению импульсов смешения

$$\psi(\lambda_1) + \chi\sqrt{\tau_1}\psi(\lambda_2) = \psi_{1(\lambda_3)} \sqrt{(1+\chi)(1+\chi\theta_1)}$$

Здесь

$$\psi(\lambda_2) = \varphi_{C2}\lambda_{2S} + \frac{1}{\lambda_{2S}}$$

где φ_{C2} - коэффициент скорости сопла пассивного газа;

λ_{2S} - теоретическая скорость истечения пассивного газа из сопла.

Когда $k_1 \neq k_2$ два основных расчетных уравнения имеет вид

$$\frac{F_{*\partial}}{F_{*C}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k_1-1}} \frac{p_O}{p_K} \left[A(1+\chi)\sqrt{r\theta} \times \psi(\lambda_3) + \xi_{\text{вy}} - \varphi(\lambda_1) \right] + \frac{F_1}{F_{*C}}$$

где $A = \sqrt{\dfrac{k_1}{k_3}\dfrac{k_3+1}{k_1+1}}$ - коэффициент, зависящий от показателя изоэнтропы газов;

$r = \frac{R_3}{R_1}$ - отношение газовых постоянных смеси и активного газа.

Второе уравнение

$$\frac{p_4}{p} = Б\left(1+\chi\right)\frac{F_*}{F_*}\frac{\varepsilon_{od}}{q\left(\lambda_3\right)}\sqrt{r_\tau}$$

где $Б = A\frac{\left(\frac{k_3+1}{2}\right)^{\frac{1}{k_3-1}}}{\left(\frac{k_1+1}{2}\right)^{\frac{1}{k_1-1}}}$ - коэффициент, зависящий от величины k_1 и k_3.

Таким образом, параметрами, определяющими режим работы эжектора, являются:

а) коэффициент эжекции χ;

б) степень сжатия (повышение давления) $\varepsilon_\partial = \frac{p_4}{p_K}$;

в) отношение давлений на активном сопле $\varepsilon_C = \frac{p_K}{p_O}$;

г) отношение температур торможения $\theta_1 = \frac{T^*_{O2}}{T^*_{O1}}$.

По результатам расчетов надо посчитать характеристики струйного эжектора. Характеристикой называется зависимость коэффициента сжатия от коэффициента эжекции. Пример построения таких характеристик показан на рис. 10.

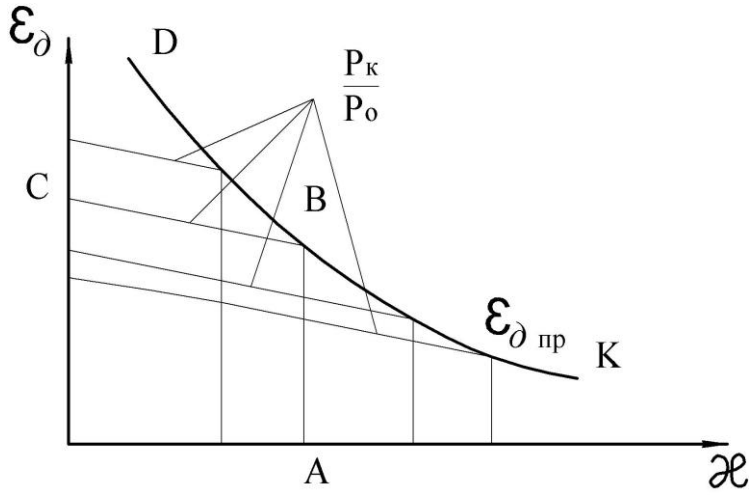


Рис. 10. Диаграмма режимов эжектора

При некотором значении $\chi = \chi_{пр}$ средняя скорость в выходном сечении горловины достигает критического значения ($\lambda_3 + 1$) при этом аппарат достигает предельных режимов, называют предельной характеристикой струйного аппарата.